Niveles de algebrización en el estudio de la probabilidad[1]

Algebraization levels in the study of probability

María Burgos
Universidad de Granada (España)
mariaburgos@ugr.es

Carmen Batanero
Universidad de Granada (España)
batanero@ugr.es

Juan D. Godino
Universidad de Granada (España)
jgodino@ugr.es

RESUMEN. Se analizan los diferentes grados de formalización matemática que pueden aplicarse en el estudio de la probabilidad en los niveles de educación no universitarios. Se aplica el modelo de niveles de algebrización de las prácticas matemáticas basado en el Enfoque Ontosemiótico para identificar los tipos de objetos y procesos que intervienen en la resolución de una selección de problemas probabilísticos. Dicho análisis permite identificar la progresión de la actividad matemática desde los niveles aritméticos y protoalgebraicos, a los niveles más elevados de algebrización y formalización. El método de análisis desarrollado puede ayudar a establecer conexiones entre los enfoques intuitivos/informales y los enfoques progresivamente más formales en el estudio de las matemáticas.

PALABRAS CLAVE: Probabilidad, formalización, ideas estocásticas fundamentales, niveles de algebrización.

ABSTRACT. The different degrees of mathematical formalisation that can be applied in the study of probability at non-university educational levels are analysed. The model of algebrization levels of mathematical practices based on the Ontosemiotic Approach is applied to identify the types of objects and processes involved in the resolution of a selection of probabilistic problems. This analysis serves to identify the progression from arithmetic and proto-algebraic levels of mathematical activity to higher levels of

[1] Burgos, M., Batanero, C. y Godino, J. D. (2022). Algebraization levels in the study of probability. *Mathematics, 2022, 10*, 91. https://doi.org/10.3390/math10010091

algebraisation and formalisation. The method of analysis developed can help to establish connections between intuitive/informal approaches and progressively more formal approaches in the study of mathematics.

KEYWORDS: Probability, formalization, fundamental stochastic ideas, algebrization levels.

INTRODUCCIÓN

Actualmente asistimos a un debate en educación estadística sobre la posibilidad de enseñar contenidos, como la inferencia estadística, mediante enfoques informales (Makar et al., 2011; Prodromou, 2017) en la formación de estudiantes con pocos conocimientos de álgebra o cálculo. La misma discusión se observa en relación a otros contenidos matemáticos, para los que se propone un mayor énfasis en la comprensión y resolución de problemas (OECD, 2019), evitando formalizaciones innecesarias y el aprendizaje de algoritmos de cálculo, menos relevantes debido a la tecnología.

Para favorecer la comprensión de los contenidos objeto de la enseñanza, y según los conocimientos previos de los estudiantes, el estudio de las matemáticas se puede hacer con diversos grados de formalización, que dependen de los procesos de generalización, simbolización y cálculo analítico; esto es, están ligados a la aplicación de conceptos y procesos algebraicos.

Una contribución a este debate sería admitir la posibilidad de diferentes niveles de formalización, es decir, distintos grados de aplicación del álgebra a lo largo del aprendizaje de las matemáticas. La visión del álgebra como uso de incógnitas, ecuaciones, funciones, parámetros, o estructuras abstractas, cuyas propiedades permiten operar con los símbolos, es restrictiva, pues oculta un rasgo esencial del razonamiento algebraico: la generalización y la expresión progresiva de la generalidad. Una perspectiva ampliada, reconoce la presencia de pensamiento algebraico incluso en la actividad matemática que se realiza en la escuela primaria (Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2008). En particular, el modelo de niveles de razonamiento algebraico elemental (RAE) (Godino et al., 2014; Godino et al., 2015), sistematiza y completa esa visión extendida y permite clarificar grados de formalización de la actividad matemática en el estudio de cualquier contenido.

En este trabajo nos centramos en la probabilidad, motivados por la diversidad de situaciones aleatorias a las que debemos enfrentarnos a lo largo de su vida, y su importancia en el estudio posterior de la inferencia. Debido a esta relevancia, diversas propuestas curriculares (ACARA, 2013; MECD, 2014) introducen la probabilidad en la Educación Primaria, persiguiendo alcanzar la cultura probabilística (Gal, 2005) que es necesaria para todo ciudadano.

El propósito de este trabajo es analizar la actividad algebraica requerida en el trabajo con la probabilidad en los niveles no universitarios, y describirla mediante los niveles propuestos en el modelo RAE. Ello permitirá definir diferentes grados de formalización en el estudio de la probabilidad, dependiendo del nivel RAE necesario en cada uno y proponer una secuencia de introducción de las ideas fundamentales de probabilidad en estas etapas educativas. El estudio puede contribuir asimismo a la discusión entre enseñanza formal e informal de la probabilidad y a comprender qué se entiende por formalización en el estudio de las matemáticas, a fin de definir trayectorias de aprendizaje que tengan en cuenta la conexión entre lo formal y lo informal en el trabajo matemático.

El artículo se organiza de la siguiente forma. Tras esta introducción, se describe el marco teórico y el método. A continuación, se analizan una serie de problemas centrados en el significado clásico de la probabilidad, que permiten introducir las ideas estocásticas fundamentales, con una progresión de niveles de algebrización. La cuarta sección incluye una síntesis de las ideas estocásticas fundamentales en relación a los niveles de algebrización y distribución sugerida para las diferentes etapas educativas. Finalmente se reflexiona sobre la relevancia del tipo de análisis realizado para progresar desde el componente intuitivo/ informal al formal en el aprendizaje matemático.

MARCO TEÓRICO Y MÉTODO

En esta sección se sintetizan los fundamentos del trabajo: algunas nociones del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino y Batanero, 1994; Godino, et al., 2007, 2019), significados de la probabilidad e ideas estocásticas fundamentales y el modelo RAE.

Significado pragmático y configuración ontosemiótica

En el EOS se asume una concepción antropológica de la matemática dando un lugar central a la noción de práctica matemática, como "*toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas*" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). También se considera la matemática como un sistema lógicamente organizado de *objetos matemáticos* que, según su naturaleza y función en las prácticas matemáticas, se clasifican en: s*ituaciones-problema* (tareas que inducen la actividad matemática), *lenguajes* (términos y expresiones; notaciones, símbolos, representaciones gráficas), *conceptos* (entidades matemáticas que pueden ser introducidas por su definición), *proposiciones* (propiedades o enunciados sobre conceptos), *procedimientos* (técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos) y *argumentos* (requeridos para justificar las proposiciones o los procedimientos).

Dichos objetos se relacionan entre sí formando *configuraciones ontosemióticas*. Las situaciones – problemas son la razón de ser de la actividad matemática; el lenguaje constituye el instrumento de trabajo matemático y representa las demás entidades; los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones. En el EOS se distingue entre objetos *extensivos* si intervienen en la práctica matemática como un caso particular, e *intensivos* si aparecen como una clase o tipo de objetos; dichas entidades resultan de los correspondientes *procesos matemáticos* de *particularización* y *generalización*, teniendo un carácter relativo a la situación que se analiza.

Significados pragmáticos de la probabilidad e ideas estocásticas fundamentales

A lo largo de la historia se han propuesto diferentes interpretaciones del concepto de probabilidad (intuitiva, clásica, frecuencial, subjetiva y axiomática) que se utilizan en la actualidad en la enseñanza (Batanero et al. 2005; Borovnick y Kapadia, 2014) y que han sido interpretados dentro del EOS como significados pragmáticos (Batanero y Díaz, 2007).

El *significado intuitivo* de la probabilidad apareció en la antigüedad, asociado a juegos de azar y ceremonias religiosas, en situaciones que requieren la expresión de grados de creencia personal sobre la ocurrencia de ciertos acontecimientos y la asignación de probabilidades de forma cualitativa.

El *significado clásico* comienza a desarrollarse en el siglo XIII (Belhouse, 2000), aunque la primera definición matemática es propuesta por De Moivre en 1718 y refinada por Laplace en 1814 como la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables (Borovcnik y Kapadia, 2014). Esta definición es circular y sólo se puede aplicar en experimentos con un número finito de sucesos equiprobables.

La demostración por parte de Bernoulli de la primera ley de los grandes números es el origen del *significado frecuencial* de la probabilidad, en el que se define la probabilidad como el límite hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso al repetir el experimento un número grande de veces. Si bien esta definición extiende el cálculo de probabilidades a experimentos con sucesos no equiprobables, no permite obtener el verdadero valor de la probabilidad, sino sólo una estimación del mismo; además, se exige la independencia de los ensayos sucesivos que deben realizarse en idénticas condiciones (Batanero y Díaz, 2007, Borovcnik y Kapadia, 2014).

Mediante el teorema de Bayes, el valor de la probabilidad (a priori) de un suceso puede revisarse a partir de nuevos datos para transformarse en una probabilidad a posteriori. A comienzos del siglo XX, matemáticos como Finetti o Ramsey se basan en este teorema para definir la probabilidad como grado de creencia basado en la experiencia personal (Borovcnik y Kapadia, 2014). Con ello se amplía el campo de aplicación, pero la probabilidad pierde el carácter objetivo al estar condicionada por un cierto sistema de conocimientos (Batanero, 2005).

La controversia sobre los problemas descritos para los diversos significados de la probabilidad fue resuelta con el desarrollo de la *teoría axiomática* (Batanero et al, 2005). Partiendo de la teoría de conjuntos, Kolmogorov define la probabilidad como una función medible que cumple ciertos axiomas y que permiten desarrollar todos los resultados conocidos en el momento sobre cálculo de probabilidades. Dichos axiomas se cumplen en las definiciones anteriores de la probabilidad, por lo que son aceptados por diferentes escuelas estadísticas (Batanero y Díaz, 2007).

Para Heitele (1975), el estudio matemático de la probabilidad requiere considerar ciertas ideas estocásticas fundamentales, presentes frecuentemente en situaciones aleatorias y que pueden enseñarse con diferentes grados de formalización. Estas son:

- El conjunto de todas las posibilidades (espacio muestral), los sucesos y sus operaciones elementales (complementario, unión, intersección).

- La equidistribución, que permite asignar probabilidad para sucesos equiprobables.
- Las reglas de la suma y el producto en el cálculo de probabilidades.
- Independencia y dependencia de sucesos y probabilidad condicional.
- Experimento compuesto, su espacio muestral, probabilidad condicionada y compuesta.
- Combinatoria elemental que se aplica en la construcción del espacio muestral y cálculo de probabilidades.
- Variable aleatoria, esperanza matemática y distribución de la variable aleatoria.
- Convergencia y ley de los grandes números.
- Muestreo y estimación.

Consecuentemente, la comprensión de la probabilidad se logra tras un proceso de estudio prolongado, que depende también del nivel de formalización, que debe ajustarse al tipo de estudiantes a que va dirigida y que haremos operativa, mediante el modelo RAE.

Niveles de algebrización

En el EOS se entiende el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) como el sistema de prácticas en la resolución de tareas en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.). El modelo RAE (Godino et al., 2014) utiliza como criterios para delimitar los distintos niveles los tipos de objetos, los procesos de generalización implicados (o grado de intensión) y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente. En base a esto se definen los siguientes niveles:

Nivel 0. Ausencia de razonamiento algebraico. Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.

Nivel 1. Se comienzan a reconocer propiedades de las operaciones y el significado relacional del signo igual, emergiendo el concepto de equivalencia. En tareas funcionales se reconoce una regla general.

Nivel 2. Se usan representaciones simbólicas para representar objetos intensivos ligados a la información contextual; se resuelven ecuaciones de la forma Ax + B =C

(A, B, C $\in \mathbb{R}$). En tareas funcionales se reconoce una regla general, pero no se opera con variables.

Nivel 3. Aparecen formas consolidadas de razonamiento algebraico. Los símbolos se usan de manera analítica, sin referirse a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables; se resuelven ecuaciones del tipo $\mathrm{A}x + B = \mathrm{C}x + \mathrm{D}$ (A, B, C, D $\in \mathbb{R}$).

Godino et al. (2015) proponen tres nuevos niveles, para lo que se recurre al uso y tratamiento de parámetros, vinculados a familias de ecuaciones y funciones. El lenguaje empleado en estos niveles es simbólico literal y los símbolos se usan de forma analítica, sin referirse a información contextual.

Nivel 4. Se utilizan parámetros y coeficientes variables para expresar familias de ecuaciones y funciones, lo que implica discriminación del dominio y rango de la función paramétrica. Se opera con coeficientes variables pero no con parámetros.

Nivel 5. Describe la actividad matemática en la que se realizan cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen parámetros conjuntamente con otras variables.

Nivel 6. El último grado de generalidad es el trabajo con estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial o grupo) o el álgebra de funciones (adición, sustracción, división, multiplicación y composición de funciones genéricas), que son temas que se inician en Bachillerato.

Método

Una caracterización de los niveles de formalización de la enseñanza de la probabilidad que sirva de referencia global para el diseño curricular, necesita adoptar un punto de vista macroscópico, incorporando los antecedentes resumidos en las secciones anteriores. Además, requiere un análisis microscópico, como el propuesto en Godino (2002) de ejemplos prototípicos de situaciones – problemas en los que intervienen de manera crítica las ideas estocásticas fundamentales y distintas maneras de abordar su resolución. Con este criterio, se han seleccionado y resuelto una serie de problemas que se gradúan según el nivel de razonamiento algebraico requerido en su resolución. A partir del análisis semiótico de las prácticas que se deben realizar para resolverlos, se identifican los conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos utilizados, para identificar los niveles RAE y las ideas estocásticas fundamentales. Todo ello permite definir grados de formalización y establecer relaciones jerárquicas entre los mismos en función de su complejidad e interdependencia.

NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO

La enseñanza de la probabilidad debería comenzar desde las ideas intuitivas de los niños sobre azar y probabilidad y culminar con el enfoque axiomático, que introduce el trabajo con estructuras algebraicas. En esta sección, siguiendo este principio se introducen progresivamente los niveles de algebrización para el estudio de la probabilidad, utilizando ejemplos del significado clásico.

Las primeras nociones de probabilidad se adquieren mediante experiencia con situaciones que requieren la cuantificación de sucesos inciertos o la expresión de grados de creencia en los mismos (Godino et al., 1987). La asignación de probabilidades a los sucesos se realiza de forma cualitativa, utilizando el lenguaje ordinario ("poco probable", "muy probable") en base a las preferencias individuales. En algunos casos se ordenan por su mayor verosimilitud ("más probable", "menos probable") y sólo se cuantifican en casos sencillos ("hay 2 más que"). No se utilizan sistemáticamente procedimientos matemáticos.

Nivel aritmético

Experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos, probabilidad

Los juegos de azar son uno de los principales contextos en el que los escolares pueden comprender las características de las situaciones aleatorias trabajando el significado clásico (Batanero et al. 2005). Si un espacio muestral E consta de un número finito n de sucesos elementales y no hay razón para suponer que alguno de ellos pueda ocurrir con mayor frecuencia que el resto, la probabilidad de cada suceso elemental es $1/n$. Así, la probabilidad de un suceso compuesto de k sucesos elementales, aplicando la regla de Laplace es igual a k/n.

En el modelo RAE, el nivel aritmético se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos sobre números particulares y el lenguaje natural o numérico. Este nivel aparece en la resolución del siguiente problema prototípico de comparación de probabilidades[2], que se analiza en la Tabla 1:

Problema 1. En la caja A hay 4 canicas rojas y 2 azules. En la caja B hay 6 canicas rojas y 4 azules. Para ganar un premio, hay que sacar una canica azul de la caja sin mirar dentro de ella. ¿Qué caja elegirías para hacer la extracción?

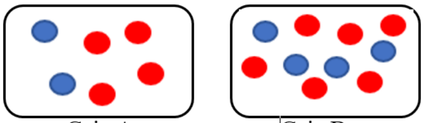


Tabla 1.
Solución al problema 1. Nivel RAE 0

Prácticas matemáticas	Objetos matemáticos
En la caja A hay el doble de canicas rojas que azules y menos del doble en la caja B. Por tanto, en la caja B es mayor la probabilidad de sacar una canica azul.	*Conceptos*: experimento, sucesos, casos favorables y desfavorables, probabilidad, doble, razón, muestreo. *Procedimientos*: distinguir y contar casos favorables y posibles, calcular la razón de casos favorables y posibles; comparar razones. *Proposiciones*: Los sucesos son equiprobables, la probabilidad de ocurrencia de un suceso depende de la razón entre casos favorables y desfavorables.

En la práctica analizada en la tabla 1 sólo intervienen valores numéricos particulares (número de canicas rojas y azules en las cajas), operaciones aritméticas (doble de una cantidad) y el orden de números naturales. Se establece una estrategia de correspondencia (Hernández-Solís et al, 2021), que lleva a calcular la razón en una de las cajas ("el doble de canicas rojas que de canicas azules") y comparar con la misma en la otra caja. Dado que no intervienen objetos y procesos algebraicos, la actividad matemática realizada se considera de nivel 0 de algebrización, según Godino et al. (2014).

Nivel proto-algebraico

Cuando, como en el problema 1, ni el número de casos favorables ni el de desfavorables es el mismo, los problemas de comparación de probabilidades no pueden resolverse

[2] Dependiendo de la composición de las dos urnas, puede resolverse mediante estrategias que van de la comparación de casos favorables a la comparación de fracciones (Hernández-Solís et al., 2021).

comparando dichos valores, siendo necesario aplicar razonamiento proporcional[3]. En el problema 1, se puede comparar la razón entre las magnitudes “número de canicas azules” (casos favorables) y “número de canicas rojas” (casos desfavorables), o entre “número de canicas azules” (casos favorables) y “número de canicas en la caja” (casos posibles). Otra solución a dicho problema sería determinar la probabilidad de éxito en cada caja por medio de la Regla de Laplace para escoger la que de mayor probabilidad. Dicha estrategia, descrita en la tabla 2, basada en la comparación de las fracciones determinadas por los casos favorables y posibles supone una actividad matemática de carácter proto-algebraico de nivel 1, en tanto aparecen objetos intensivos de segundo grado de generalidad (números racionales), propiedades de la estructura algebraica de $\mathbb{N}$ y la igualdad como equivalencia.

Tabla 2.
Solución al problema 1. Nivel RAE 1

Prácticas matemáticas	Objetos matemáticos
Dado que hay dos canicas azules y cuatro rojas en la caja A, la probabilidad de obtener canica azul en la caja A es $\frac{2}{6}$. De igual manera, hay 4 canicas azules y 6 rojas en la caja B, por lo que la probabilidad de sacar una canica azul en la caja B es $\frac{4}{10}$. Ahora, $2 \times 10 = 20 < 24 = 6 \times 4$ por lo que $\frac{2}{6} < \frac{4}{10}$. Así, la probabilidad de éxito es menor en la caja A que en la B.	*Conceptos*: azar, juego de azar, casos favorables, casos posibles, probabilidad *Procedimientos*: distinguir casos favorables y posibles, contar casos favorables y posibles, aplicar la regla de Laplace, comparar fracciones. *Proposiciones*: los sucesos son equiprobables, la probabilidad de ocurrencia de un suceso sólo depende del número de elementos; una fracción es menor que otra si el producto de su numerador por el denominador de la otra es menor que el producto de su denominador por el numerador de la otra. *Argumentos*: basados en la equiprobabilidad de los sucesos, la regla de Laplace y las propiedades de las fracciones.

Experimento compuesto, dependencia e independencia, regla del producto

En la educación secundaria se introducen los experimentos compuestos, cuyo tratamiento supone una mayor complejidad, dado que pueden implicar principios de combinatoria en

[3] El razonamiento proporcional aparece al resolver situaciones que se caracterizan mediante dos tipos de relaciones (a) la funcional que vincula magnitudes diferentes y refleja el sentido de la razón y, (b) la escalar que vincula cantidades de la misma magnitud (Llinares, 2003).

la enumeración del espacio muestral. En los problemas de urnas, se debe diferenciar entre muestreo con o sin reemplazamiento, lo que implica la independencia o dependencia de los experimentos simples, como vemos en el problema 2.

Problema 2. En una caja hay dos bolas azules y cuatro rojas. Se sacan dos bolas una detrás de otra, anotando el color de la primera y devolviéndola a la urna, antes de extraer la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolas azules? ¿Y si se sacan simultáneamente las dos bolas de la urna?

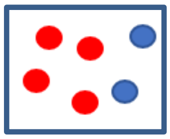


Tabla 3.
Solución del problema 2. Nivel RAE 1

Prácticas matemáticas	Objetos matemáticos
Se trata de un experimento compuesto. En la primera parte, se realiza un muestreo con reemplazamiento, siendo el resultado de la segunda extracción independiente del de la primera. Como hay dos canicas azules y cuatro rojas en la caja, la probabilidad de obtener canica azul es $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. $P\ (1^{\underline{a}}\ bola\ azul)=\frac{1}{3}$; $P\ (2^{\underline{a}}\ bola\ azul)=\frac{1}{3}$; Por tanto, la probabilidad de que las dos bolas sean azules es $P\ (2\ bolas\ azules)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. En la segunda parte el segundo experimento depende del primero y se modifica la probabilidad de obtener la bola azul. Como $P\ (2^{\underline{a}}\ bola\ azul)=\frac{1}{5}$, $P\ (2\ bolas\ azules)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$.	*Conceptos:* Experimento. Casos favorables y posibles. Experimento compuesto, probabilidad compuesta, independencia, dependencia, probabilidad condicionada, muestreo con y sin reemplazamiento. *Procedimientos:* cálculo de probabilidades simples y compuestas. Producto de fracciones. *Proposiciones:* El muestreo con reemplazamiento supone independencia de ensayos.

En las prácticas incluidas en la tabla 3, están involucradas las propiedades y cálculo con fracciones y la igualdad como equivalencia, por lo que la actividad matemática tiene un carácter proto-algebraico de nivel 1. Además, se usa la regla del producto, que permite resolver problemas de probabilidad compuesta si los experimentos son independientes. En los experimentos dependientes se generaliza haciendo uso de la probabilidad condicional.

Variable aleatoria, juego equitativo, esperanza matemática

En un experimento compuesto, el espacio muestral viene dado por el producto cartesiano de los espacios muestrales de los experimentos simples. Por ejemplo, consideremos la siguiente situación en la que, además, aparecen implícitas las ideas de variable aleatoria, distribución y esperanza matemática:

Problema 3. Lanzamos dos dados y sumamos las puntuaciones. ¿A qué puntuación apostarías para tener más probabilidad de ganar?

La descripción del espacio muestral asociado al experimento en una tabla de doble entrada (tabla 4), requiere de un proceso de representación/interpretación de grado mayor de generalidad (conjunto de pares de números, clasificado en filas y columnas).

Tabla 4.
Espacio muestral correspondiente al problema 3

Dados	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A partir de ésta, se determinan las sumas de los pares y la distribución de probabilidad de la variable "suma de dos dados".

Tabla 5.
Distribución de probabilidad de la suma de dos dados. Nivel RAE 2

Suma	Posibles resultados	Casos favorables	Probabilidad
2	(1,1)	1	1/36
3	(1,2), (2,1)	2	2/36
4	(1,3), (2,2), (3,1)	3	3/36
5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	4	4/36
6	(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	5	5/36
7	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	6	6/36
8	(2,6), (3,5) (4,4), (5,3), (6,2)	5	5/36
9	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	4	4/36
10	(4,6), (5,5), (6,4)	3	3/36
11	(5,6), (6,5)	2	2/36
12	(6,6)	1	1/36
Total		36	

En la tabla 5, a cada valor de la variable "suma de dos dados" corresponden tres objetos diferentes: en la segunda columna se asignan los posibles resultados del experimento, en la tercera el número de casos favorables, y en la cuarta, la probabilidad de obtener cada valor de la variable. Una tabla de probabilidad actúa como icono de una estructura de relaciones que permite obtener conocimientos relativos a características y forma de la distribución de probabilidad. Así, se observa que la moda de la variable es 7, por lo que, se debería apostar al 7, pues su probabilidad $\frac{5}{36}$, es la mayor. Este aspecto funcional, y no usar símbolos alfanuméricos característicos del razonamiento algebraico consolidado (nivel 3), llevarían a asignar el nivel proto-algebraico 2 a la actividad matemática implicada en la solución.

Como hemos mencionado, la probabilidad nace de situaciones ligadas a los juegos de azar. En estos problemas implícitamente se considera una variable aleatoria, que toma al menos dos valores diferentes (la ganancia asignada a cada jugador si gana). Este conjunto de valores con sus probabilidades constituye la distribución de probabilidad de la variable aleatoria, cuya media se conoce como esperanza matemática. Para que el juego sea equitativo, será necesario igualar las esperanzas de ganancia, es decir, los productos de premio otorgado y probabilidad de ganar de cada jugador. Así, el primer paso para decidir si un juego es equitativo, reside en comparar las probabilidades de ganar de los diferentes jugadores. Este es el contexto del problema 4:

> Problema 4. Alicia y Pablo están jugando a un juego usando una caja con canicas. Alicia tiene en su caja 4 canicas rojas y 2 azules. Pablo tiene en su caja 6 canicas rojas y 4 azules. Pablo gana 50 céntimos cada vez que saca una canica roja. ¿Cuánto debería ganar Alicia cada vez que saque una canica azul para que el juego sea equitativo?

Tabla 6.
Solución al problema 4. Nivel RAE 2

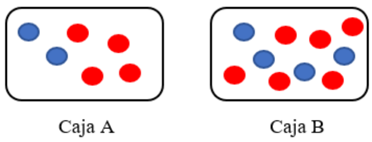
Prácticas matemáticas	Objetos matemáticos
Dado que Alicia gana siempre que extrae una canica azul y Pablo lo hace si es roja, las probabilidades de ganar cada uno son: $P(\text{"gana Alicia"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $P(\text{"gana Pablo"}) = \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$ Si x es la cantidad que debe ganar Alicia cuando obtiene la canica azul, y Pablo gana 50 céntimos de euro cuando es roja, para que el juego sea equitativo, se debe cumplir que $P(\text{"gana Alicia"}) \times x = P(\text{"gana Pablo"}) \times 50$ Esto es, $\frac{1}{3}x = \frac{2}{5} \times 50$, de donde $\frac{1}{3}x = 20$, y así $x = 60$. Es decir, Alicia debe ganar 60 céntimos cada vez que la canica sea azul.	*Conceptos:* azar, juego equitativo, casos favorables y posibles, probabilidad, variable aleatoria, esperanza matemática. *Procedimientos:* cálculo de probabilidades, igualación de ganancia esperada de los jugadores, planteamiento y resolución de la ecuación de proporcionalidad inversa. *Proposiciones:* Las ganancias y probabilidades son inversamente proporcionales. *Argumentos:* El juego es equitativo si los jugadores tienen la misma ganancia esperada.

En el problema 4 aparecen de manera implícita las ideas de variable aleatoria y esperanza matemática. Como se observa en la tabla 6, la solución requiere tanto el cálculo de las probabilidades de éxito de cada jugador como reconocer la relación de proporcionalidad inversa entre la esperanza de ganar y la cantidad recibida. Esto supone plantear y resolver una ecuación en la que la incógnita (ganancia de uno de los jugadores) está despejada en un miembro de la ecuación. Así, según el modelo de Godino et al. (2014), se desarrolla una actividad proto-algebraica de nivel 2 de algebrización.

Nivel algebraico

Para asignar nivel propiamente algebraico (nivel 3) a una práctica se requiere el uso de lenguaje simbólico-literal y que se opere de manera analítica/sintáctica con dicho lenguaje (Godino, Aké et al., 2014). Para ejemplificarlo, se propone el Problema 5.

Problema 5. En la caja A se han metido 4 canicas rojas y 2 canicas azules. En la caja B se han metido 6 canicas rojas y 4 canicas azules. ¿Cómo repartirías 8 canicas rojas para que la probabilidad de sacar una canica azul fuese la misma en las dos cajas?



En una solución aritmética, se podría razonar como sigue:

Podemos repartir las 8 canicas rojas, colocando 2 en la caja A, para llegar a 6 rojas, y 6 en la caja B, que tendría 12 rojas, de manera que en ambas cajas las canicas rojas serían el triple de las azules y por tanto habría igual probabilidad de sacar canica azul.

Otra solución de nivel mayor de algebrización que permite generalizar el resultado a otras composiciones de casos favorables y posibles en las cajas se incluye en la Tabla 7.

Tabla 7.
Solución al problema 5. Nivel RAE 3

Prácticas matemáticas	Objetos matemáticos
Sea *a* el número de canicas rojas que se colocan en la caja A, y *b* el número que se añade a la caja B. Para que la probabilidad de extraer una canica azul sea la misma, se debe cumplir: $\frac{2}{2+4+a} = \frac{4}{4+6+b} \Rightarrow$ $2(10+b) = 4(6+a) \Leftrightarrow 20+2b = 24+4a$ $\Leftrightarrow 2b = 4+4a \Leftrightarrow b = 2+2a$	*Conceptos:* experimento, casos favorables y posibles, probabilidad, razón, *Procedimientos:* aplicar la regla de Laplace, plantear un sistema de ecuaciones y sustituir para resolver una ecuación del tipo $Ax + B = Cx + D$. *Proposiciones:* Las canicas rojas (casos desfavorables) se deben repartir de forma que el número de canicas azules sea

Como el número de canicas rojas a repartir es 8, $a+b=8, b=8-a$. Así, $$8-a=2+2a \Leftrightarrow 6=3a \Leftrightarrow a=2$$ Por tanto, deberíamos añadir 2 canicas rojas a la caja A y el resto a la caja B.	directamente proporcional al número de canicas totales. *Argumentos:* Se basa en la definición de probabilidad y en la relación de proporcionalidad.

En ella se han planteado de manera simbólica las ecuaciones y se aplica una técnica de sustitución para resolverlas; por tanto, el razonamiento corresponde con un nivel 3 de algebrización, según el modelo de Godino et al. (2014).

Primer encuentro con parámetros

En probabilidad es característico usar distribuciones generales que quedan determinadas por uno o varios parámetros, tales como la distribución binomial B(*n*,*p*), que se estudian en Bachillerato. Dado un experimento aleatorio y un suceso A, con probabilidad p, se dice que hay éxito, si en el experimento resulta A y se habla de fracaso en caso contrario. En n repeticiones independientes del experimento, el número de éxitos es una variable aleatoria X, con valores enteros comprendidos entre 0 y n, que sigue una distribución binomial de parámetros n (número de ensayos) y p (probabilidad de éxito en cada uno). Este es el contexto del problema 6:

> Problema 6. Considera el experimento consistente en lanzar dos dados y sumar sus puntuaciones. ¿Cuál es la probabilidad de obtener suma 7, un número dado de veces, en *n* repeticiones del experimento?

Tabla 8.
Solución al problema 6. Nivel RAE 4

Prácticas matemáticas	Objetos matemáticos
Al ser los ensayos independientes, la probabilidad de obtener suma 7 en cada uno, se mantiene igual a 5/36. Si al repetir el experimento n veces, en los *k* primeros, se obtuvo “suma 7” (E) y en los $(n-k)$ siguientes “suma distinta de 7” (F), la probabilidad es: $$P\left(\overbrace{E,E,\dots,E}^{k\ veces},\overbrace{F,F,\dots,F}^{n-k\ veces}\right)=$$ $$=\overbrace{P(E)\cdot P(E)\cdot\ldots\cdot P(E)}^{k\ veces}\cdot\overbrace{P(F)\cdot P(F)\cdot\ldots\cdot P(F)}^{n-k\ veces}$$ $$=\left(\frac{5}{36}\right)^{k}\cdot\left(\frac{29}{36}\right)^{n-k}$$ La probabilidad de obtener *k*-veces suma 7 (E) y (*n*−*k*)-veces suma distinta (F), es la misma en cualquier ordenación de éxitos (E) o fracasos (F) (propiedad conmutativa del producto).	*Conceptos:* experimento compuesto, sucesos independencia, probabilidad, combinaciones, parámetros. *Procedimientos:* Calcular la probabilidad de éxito usando la regla de Laplace; calcular la probabilidad compuesta con la regla del producto. Calcular el número de combinaciones de *n* elementos tomados de *k* en *k*. *Proposiciones:* La probabilidad de éxito es constante en cada experimento. La probabilidad de obtener *k*-éxitos en *n*-pruebas es la misma para cualquier ordenación de

Para calcular la probabilidad de obtener suma 7 en k lanzamientos, basta multiplicar por el número de posibles formas de ordenar los éxitos y fracasos, es decir por el número de combinaciones de n elementos tomados de k en k. $P(k \text{ sumas 7 en } n \text{ lanzamientos}) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{5}{36}\right)^k \cdot \left(\frac{29}{36}\right)^{n-k}$	éstos; el número de combinaciones de n elementos tomados de k en k es $\binom{n}{k}$. *Argumentos:* Se basa en la independencia de los experimentos simples, la regla del producto y las técnicas combinatorias.

Este primer encuentro con parámetros para determinar la probabilidad de éxito en k ensayos de las n repeticiones, descrito en la tabla 8, supone un nivel 4 en el modelo RAE (Godino et al., 2015). El uso de parámetros fomenta la reificación de fórmulas y de expresiones algebraicas y es un medio de generalización, al determinar familias de objetos (distribuciones de probabilidad, en nuestro caso) que pueden ser modelizados y representados mediante una estructura común (Drijvers, 2003). En particular, la situación descrita en el problema 6 se puede generalizar a una distribución binomial B(n,p) de parámetros n y p, cuya distribución de probabilidades es:

$$P(\mathrm{X} = \mathrm{k}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 1, \dots n.$$

Operaciones con parámetros

Las operaciones con parámetros aparecen en los textos de bachillerato en el estudio de la distribución normal y la inferencia estadística. Una vez estudiadas las variables aleatorias continuas y los conceptos de función de densidad y distribución, se introduce la distribución normal de parámetros μ y σ, $N(\mu, \sigma)$, que es una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ para todo } x \epsilon \mathbb{R}.$$

Dicha distribución se estudia por sus aplicaciones en fenómenos biológicos, psicológicos o en teoría de errores. La función de distribución de una variable aleatoria continua X es una función de variable real que viene dada por medio de una integral[4]:

$$F(x) = P((-\infty \leq X \leq x]) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

[4] De hecho es una integral impropia que los alumnos de Bachillerato no manejan.

A partir de ella se calculan probabilidades de la variable en intervalos:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Sin embargo, dado que la función de densidad normal carece de primitiva, su función de distribución no tiene una expresión explícita, por lo que se utilizan métodos numéricos para obtener sus valores. En la práctica, los estudiantes pueden bien utilizar una calculadora que proporciona los valores de la función de distribución $F(x)$ dado x, o una tabla estadística de la distribución normal N(0,1). Esto requiere emplear las propiedades de la distribución normal, para concluir que si X es una variable normal $N(\mu, \sigma)$ entonces $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ es una variable $N(0,1)$.

Problema 7. Determina en función de $\mu\ y\ \sigma,$ el percentil del 90% en una distribución normal $N(\mu, \sigma)$.

La obtención del percentil en una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, en forma general, como propone el problema 7, requiere operar con los parámetros (tabla 9):

Tabla 9.
Solución al problema 7. Nivel RAE 5

Prácticas matemáticas	Objetos matemáticos
El percentil del 90% es el valor P_{90} tal que: $P\ (X \leq P_{90})$=0,9 En la tabla de la distribución normal N (0,1) se puede observar que: $P\ (Z \leq 1{,}28)$=0,9, siendo Z=$\frac{X-\mu}{\sigma}$. Entonces $P\ (\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1{,}28)$=0,9; $P\ (X - \mu \leq 1{,}28\ \sigma)$=0,9 = $P\ (X \leq \mu + 1{,}28\ \sigma)$, luego P_{90}=$\mu +\ 1{,}28\ \sigma$.	*Conceptos:* variable aleatoria, función de densidad, distribución normal, percentil, distribución normal estándar *Procedimientos:* operaciones con parámetros, uso de tabla de la N(0,1), tipificación y operación inversa *Proposiciones:* Cualquier combinación lineal de una variable aleatoria normal es también una variable aleatoria normal. Al tipificar la distribución normal se pasa a la N (0,1) *Argumentos*: recaen en las propiedades de la distribución normal y del cálculo de probabilidades.

Este nivel 5 de algebrización (Godino et al., 2015), que involucra operaciones con parámetros aparece también en la aproximación de la distribución binomial por medio de una distribución normal. Así, el Teorema de De Moivre-Laplace [5] permite asegurar que la probabilidad de que la distribución binomial *B(n, p*) converja a una distribución normal $N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ puede ser mayor que un cierto valor, para un n suficientemente elevado, aceptándose una buena aproximación si $np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$.

Trabajo con estructuras algebraicas

Aunque los problemas presentados hasta ahora se pueden resolver mediante el significado clásico de la probabilidad, en esta sección discutiremos otros que se incluyen en el significado axiomático. Puesto que este significado engloba a todos los anteriores, se puede considerar esta sección una ampliación del estudio de la probabilidad clásica a un nivel mayor de abstracción.

Kolmogorov propuso una axiomática satisfactoria para la probabilidad, considerando que el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio viene determinado por el conjunto Ω de todos los posibles resultados asociados al experimento (puntos muestrales) y una σ-álgebra de sucesos $\mathcal{A}$ sobre dicho espacio muestral (es decir, una clase de subconjuntos de Ω cerrada para uniones numerables, contrarios y que contiene al vacío). Definió la probabilidad como una función de conjuntos P: $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface tres axiomas:

P_1 (*No negatividad*) $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$.

P_2 (*Suceso seguro*) $P(\Omega) = 1$.

P_3 (*σ-aditividad*) Para toda sucesión $\{A_i\}$ de sucesos incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$ $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

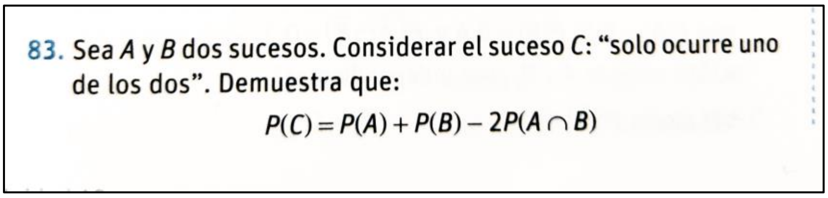
Estos axiomas permiten deducir las reglas del cálculo de probabilidades, aunque no la forma de asignar la probabilidad a los sucesos elementales no equiprobables (Batanero et al., 2005). No obstante, en un experimento aleatorio con espacio muestral finito Ω, asumiendo que todos los sucesos elementales son equiprobables, la función P: $\mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

[5] La complejidad del teorema se debe a que involucra una sucesión de distribuciones (B (*n*, *p*), con *n* variando) cuyo límite no es un límite funcional ordinario, sino una convergencia estocástica.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \quad (\#A \text{ denota el cardinal del suceso } A),$$

cumple los axiomas anteriores. Esto permite deducir la regla de Laplace para la asignación clásica de probabilidades.

Con menos formalidad, en el Bachillerato se introduce la axiomática de Kolmogorov y se define la probabilidad en algunos textos como una aplicación de cada suceso en el intervalo [0,1]. De los axiomas se derivan algunas propiedades que facilitan la resolución de problemas cuando se conoce la probabilidad de ciertos sucesos de un espacio muestral y se desea determinar la de otros del mismo espacio. La demostración de estas proposiciones requiere que los estudiantes activen procesos de interpretación, unitarización, materialización, reificación y representación de objetos intensivos, por lo que el grado de abstracción es mayor que el necesario en su aplicación. En la figura 1 se presenta un ejemplo de actividad tomada de un texto de Bachillerato.


83. Sea A y B dos sucesos. Considerar el suceso C: "solo ocurre uno de los dos". Demuestra que:

$$P(C) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Fig. 1. Problema 8. Demostración de propiedades teóricas
(Alcaide et al., 2017, p. 360)

Como se muestra en la tabla 10, para resolver el problema 8 se debe interpretar el suceso C "solo ocurre uno de los dos", mediante operaciones con los sucesos A y B, de manera que "ocurre A y no ocurre B" viene dado por $A \cap \bar{B}$ y "ocurre B y no ocurre A" es $\bar{A} \cap B$.

Tabla 10.
Solución al problema 8. Nivel RAE 6

Prácticas matemáticas	Objetos matemáticos
Teniendo en cuenta que $C = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$, $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ y $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$, por la propiedad aditiva de la probabilidad: $P(C) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$, De aquí se sigue: $P(C) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$	*Conceptos:* conjuntos, unión, intersección, complementario, conjuntos disjuntos. *Procedimientos:* Operaciones con conjuntos; operaciones con la función de probabilidad. *Proposiciones:* La unión de un suceso y su complementario es el espacio muestral. La intersección de un suceso y el complementario de otro es igual a la

$= \left(P(A) - P(A \cap B)\right) + \left(P(B) - P(A \cap B)\right)$ $= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$	diferencia del primero con el segundo. La probabilidad es aditiva en sucesos disjuntos.

En esta secuencia de prácticas, los sucesos son vistos como conjuntos, no concretos de un espacio en particular, sino como objetos abstractos sobre los cuales se definen operaciones (unión, intersección, contrario) que cumplen un sistema de propiedades específicas; la probabilidad es una aplicación definida sobre dichos conjuntos que cumple ciertas "reglas" en relación a sus operaciones. Por tanto, el nivel RAE es 6.

SÍNTESIS Y ARTICULACIÓN DE LOS NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN EL ESTUDIO DE LA PROBABILIDAD

En la tabla 11 se presenta un resumen de las ideas estocásticas fundamentales, objetos algebraicos y niveles RAE que aparecen en los problemas analizados. Se observa que las mismas ideas estocásticas se pueden trabajar con los diferentes niveles RAE, eligiendo adecuadamente el tipo de problema y método de resolución. Esta observación corrobora dos supuestos de Heitele (1975): a) Las ideas fundamentales aparecen en la mayoría de las situaciones aleatorias; b) Es posible enseñarlas con diferentes grados de formalización. En este sentido, el trabajo también completa el de Heitele (1975), al operativizar sus grados de formalización mediante los seis niveles de razonamiento propuestos en el modelo RAE.

Tabla 11.
Síntesis de ideas estocásticas y niveles de algebrización en los ejemplos

Ideas estocásticas fundamentales	Ejemplos de problemas							
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
Probabilidad, casos favorables, desfavorables y posibles	x	x	x	x	x	x	x	x
Experimento aleatorio, espacio muestral, suceso	x	x	x	x	x	x	x	x
Equidistribución, equiprobabilidad, Regla de Laplace	x	x	x	x	x			
Regla de la suma	x	x	x	x	x	x	x	x
Dependencia e independencia de sucesos		x	x					
Experimento compuesto, regla del producto		x	x			x		
Combinatoria		x	x			x		
Variable aleatoria, distribución, esperanza matemática			x	x		x	x	
Muestreo	x	x						

Objetos algebraicos									
Conjuntos numéricos		x	x	x	x	x			
Razón, proporción		x	x	x	x	x			
Símbolos alfanuméricos, ecuaciones				x	x	x	x	x	x
Funciones (distribución), representaciones				x	x		x	x	
Parámetros							x	x	
Operaciones con parámetros								x	
Estructuras algebraicas									x
Niveles RAE									
Aritmético	0	x				x			
Protoalgebraico	1	x	x						
	2			x	x				
Algebraico	3					x			
	4						x		
	5							x	
	6								x

Aunque no en todos los problemas particulares elegidos aparecen siempre todas las ideas estocásticas, es posible variar la mayoría, para lograr que se encuentren implícitas e igualmente se puede cambiar el problema para trabajar a un nivel RAE diferente. Así, por ejemplo, en el problema 2 se puede suponer que se extraen *n* bolas con reemplazamiento y pedir la probabilidad de obtener un número *x* de color rojo, lo cual llevaría a la variable aleatoria, distribución (binomial) y uso de parámetros (nivel 4).

El análisis permite asimismo reflexionar sobre los niveles RAE implícitos en el trabajo con la probabilidad en el currículo (MECD, 2014; 2015). En Educación Primaria se comienza a trabajar de forma intuitiva y a nivel aritmético, para acercar al niño a los fenómenos aleatorios de su vida cotidiana, ampliando su lenguaje probabilístico, hasta llegar al cálculo como cociente de casos favorables y posibles, en problemas sencillos. Al finalizar esta etapa, los estudiantes han trabajado las proporciones y proporcionalidad, estrechamente relacionados con algunos contenidos probabilísticos (Langrall y Mooney, 2005; Van Dooren, 2014).

Comenzada la Educación Secundaria Obligatoria, se espera que los alumnos puedan dotar de sentido a las nociones de razón y proporción en magnitudes proporcionales e inversamente proporcionales (Burgos y Godino, 2020), lo que permitiría trabajar los juegos equitativos en que los jugadores tienen diferente probabilidad de ganar. Los problemas sobre experimentos compuestos que se introducen en 3º ESO, pueden apoyarse en un primer momento en el diagrama en árbol (una de las principales herramientas en probabilidad y combinatoria, según Fischbein, 1975). Al final de la educación secundaria, se incluye el estudio formal de la combinatoria, en cuyas fórmulas de cálculo intervienen parámetros, lo que supone un nivel 4 de algebrización.

Aunque los axiomas de probabilidad se pueden presentar en forma intuitiva, su expresión formal a partir de la teoría de Kolmogorov, a nivel RAE 6 sólo se trabaja actualmente en Bachillerato y su estudio es muy limitado, dando preferencia al trabajo con situaciones extramatemáticas. De la misma manera, si bien las variables aleatorias y las distribuciones de probabilidad aparecen de manera implícita en la ESO en la actividad matemática característica de niveles proto o algebraicos, el estudio de los modelos de distribución, como la binomial o normal, en los que se aplican los niveles 4 y 5 de algebrización se reservan al Bachillerato.

REFLEXIONES FINALES

El modelo RAE aplicado en este trabajo permite profundizar la caracterización de las matemáticas que proponen otros autores, desde el punto de vista epistemológico y de los procesos de aprendizaje. Así, Fischbein (1994) considera las matemáticas: "(a) como un cuerpo de conocimiento formal, deductivo y riguroso, tal como se expone en los tratados y libros de texto de alto nivel; (b) las matemáticas como actividad humana" (p. 231). También propone reconocer las interacciones entre los componentes formal, algorítmico e intuitivo de las matemáticas.

Freudenthal (1991) considera que las matemáticas no deben ser aprendidas como un sistema cerrado sino como una actividad de matematización de la realidad. En la Educación Matemática Realista, desarrollada sobre sus ideas, se distingue entre matematización horizontal y vertical. En la primera, los estudiantes utilizan herramientas matemáticas para organizar y resolver problemas de la vida real, lo que implica pasar del mundo real al de los símbolos. La matematización vertical implica la reorganización de símbolos, conectando conceptos y estrategias dentro del sistema matemático.

Como hemos mostrado en este trabajo, el análisis basado en el EOS de la resolución de problemas revela la presencia de objetos y procesos propios de niveles proto-algebraicos, cuyo reconocimiento puede ayudar en el tránsito entre los componentes intuitivos, algorítmicos y formales (Fischbein, 1994) y de las interacciones entre el componente horizontal y vertical de la actividad matemática (Freudenthal, 1991). Además, incluso dentro del estudio formal de las matemáticas es posible y útil admitir diferentes grados de generalización y formalización.

El trabajo se podría continuar analizando los niveles RAE en actividades que involucran los significados frecuencial y subjetivo de la probabilidad, no consideradas aquí por limitaciones de espacio o para otros contenidos curriculares. Así mismo, deberán estudiarse las implicaciones que este tipo de análisis para la formación de los profesores. Los distintos grados de formalización en el razonamiento probabilístico, deberían tenerse en cuenta en la formación los profesores para enseñar probabilidad y en instrumentos de evaluación de tales conocimientos, como el desarrollado por Vásquez et al., (2020).

Los ejemplos descritos servirán al profesor para analizar el grado de generalidad y formalización en la actividad matemática involucrada en la resolución de problemas de probabilidad y planificación de los procesos de instrucción, valorando en qué etapa educativa y de qué forma se puede abordar el estudio de la probabilidad con diversos niveles de algebrización teniendo en cuenta también los contenidos probabilísticos que se trabajan.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía)

REFERENCIAS

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA) (2014). *Foundation to year 10 curriculum: Statistics and Probability* (ACMSPO24).

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime*, 8(3), 247-264.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). The meaning and understanding of mathematics. En K. François (Ed,). *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-127). Springer.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in school* (pp. 15-37). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2.

Bellhouse, D. R. (2000). De Vetula: a medieval manuscript containing probability calculations. *International Statistical Review, 68*(2), 123-136. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2000.tb00317.x.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking* (pp. 7-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_2.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *AIEM*, 18, 1-20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, 669-705). Information Age y NCTM.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer, B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 231-245). Kluwer.

Freudenthal H (1991) Revisiting mathematics education. China lectures. Kluwer.

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Springer

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencia*s, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Síntesis.

Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education* 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39 (1), 37- 42

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*, 187-205.

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021). Comparing probabilities in urns: A study with primary school students. *Uniciencia*, *35*(2), 1-19. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.9.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. -17). Routledge.

Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 95–119). New York: Springer.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de la matemática para Primaria* (pp. 187-220) Pearson Prentice Hall

Makar, K., Bakker, A. y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 152-173. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538301.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. MECD.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato*. MECD,

OECD (2019). PISA 2018 *Assessment and Analytical Framework*. OECD. https://doi.org/10.1787/13c8a22c-en.

Prodromou, T. (2017). Model-based informal inference. *International Journal of Statistics and Probability*, *6*(5), 140-147.

Alcaide, F., Sanz, L., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2017). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. SM.

Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: analyses from a psychological perspective. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 123-126). Springer.

Vásquez, C., Alsina, Á., Pincheira, N. Gea, M. M. y Chandia, E. (2020). Construcción y validación de un instrumento de observación de clases de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(2), 25-43.44 https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2820.